Planche n° 18. Suites

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (IT)**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}{n+1}.$$

1) Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite ℓ. Réciproque ?

2) Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Réciproque ?

3) Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi.

Exercice n° 2 (***)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Césaro et est monotone, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice n° 3 (IT)**

Pour n entier naturel non nul, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (série harmonique).

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) < H_n < 1 + \ln(n)$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n$.

2) Pour n entier naturel non nul, on pose $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un réel $\gamma \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (γ est appelée la constante d'Euler). Donner une valeur approchée de γ à 10^{-2} près.

Exercice n° 4 (**)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique ne s'annulant pas. Montrer que pour tout entier naturel n, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0 u_{n+1}}.$$

Exercice n° 5 (***)

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \ldots + k^2}$ (on sera amené à déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout entier naturel non nul k, $\dfrac{6}{k(k+1)(2k+1)}$ et on utilisera l'exercice n° 3 : il existe une suite (ε_n) tendant vers 0 telle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$).

Exercice n° 6 (I)** (moyenne arithmético-géométrique)

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a$ et $v_0 = b$ puis, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune que l'on ne cherchera pas à calculer (cette limite s'appelle la moyenne arithmético-géométrique des nombres a et b).

Exercice n° 7 (***)

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a$ et $v_0 = b$ puis, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et que leur limite commune est égale à $\dfrac{b \sin\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{a}{b}\right)\right)}{\operatorname{Arccos}\left(\frac{a}{b}\right)}$.

Exercice n° 8 (I)**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ne s'annulant pas. Montrer que si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ tend vers un réel ℓ élément de $[0,1[$ quand n tend vers $+\infty$, alors u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n° 9 (**)

Limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$\textbf{1)}\ \frac{\sin n}{n}\quad \textbf{2)}\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\quad \textbf{3)}\ \frac{n!}{n^n}\quad \textbf{4)}\ \frac{E\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)}{E\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right)}\quad \textbf{5)}\ \sqrt[n]{n^2}\quad \textbf{6)}\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\quad \textbf{7)}\ \frac{\sum_{k=1}^{n}k^2}{n^3}\quad \textbf{8)}\ \prod_{k=1}^{n}2^{k/2^{2^k}}.$$

Exercice n° 10 (**)

Etudier la suite (u_n) définie par $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{2\sqrt{n+u_n}}$.

Exercice n° 11 (T)** (Récurrences homographiques).

Déterminer u_n en fonction de n quand la suite u vérifie :

$$\textbf{1)}\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\frac{u_n}{3-2u_n}\quad \textbf{2)}\ u_{n+1}=\frac{4(u_n-1)}{u_n}$$

(ne pas se poser de questions d'existence).

Exercice n° 12 (**)

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par la donnée de u_0 et v_0 et les relations de récurrence

$$u_{n+1}=\frac{2u_n+v_n}{3}\ \text{et}\ v_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}.$$

Etudier les suites u et v puis déterminer u_n et v_n en fonction de n en recherchant des combinaisons linéaires intéressantes de u et v. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.

Exercice n° 13 (**)

Même exercice avec $u_{n+1}=\dfrac{v_n+w_n}{2}$ et $v_{n+1}=\dfrac{u_n+w_n}{2}$ et $w_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$.

Exercice n° 14 (***)

Soit u une suite complexe et v la suite définie par $v_n=|u_n|$.

On suppose que la suite $(\sqrt[n]{v_n})$ converge vers un réel positif ℓ.
Montrer que si $0\leqslant\ell<1$, la suite (u_n) converge vers 0 et si $\ell>1$, la suite (v_n) tend vers $+\infty$.

Montrer que si $\ell=1$, tout est possible.

Exercice n° 15 (*I)**

1) Soit u une suite de réels strictement positifs. Montrer que si la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers un réel ℓ, alors $(\sqrt[n]{u_n})$ converge et a même limite.

2) Etudier la réciproque.

3) Application : limites de a) $\sqrt[n]{C_{2n}^n}$ b) $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ c) $\dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{n!}}$.

Exercice n° 16 (*)

Soient u et v deux suites de réels de $[0,1]$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_nv_n=1$. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

Exercice n° 17 (**)

Montrer que si les suites (u_n^2) et (u_n^3) convergent alors (u_n) converge.

Exercice n° 18 (*T)**

Etudier les deux suites $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Exercice n° 19 (T)**

Même exercice avec $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$.

Exercice n° 20 (T)**

Même exercice avec $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}$ et $v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$.

Exercice n° 21 (T)**

Déterminer u_n en fonction de n et de ses premiers termes dans chacun des cas suivants :

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n$.

2) $\forall n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+2} = u_n$.

3) $\forall n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n + 12$.

4) $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{2}{u_{n+2}} = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.

5) $\forall n \geqslant 2,\ u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} + 2^n$.

Exercice n° 22 (***)

Montrer que, pour $n \geqslant 2$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}\ (n-1 \text{ radicaux}) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}\ (n-1 \text{ radicaux}).$$

En déduire $\lim_{n\to+\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$ (n radicaux).

Exercice n° 23 (***)

1) Montrer que pour x réel strictement positif, on a : $\ln(1+x) < x < (1+x)\ln(1+x)$.

2) Montrer que $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e^n < \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$ et en déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Exercice n° 24 (****)

Soit $(u_n) = \left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ avec $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$, une suite de rationnels convergeant vers un irrationnel x. Montrer que les suites $(|p_n|)$ et (q_n) tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n° 25 (**)

Trouver un exemple de suite (u_n) divergente, telle que $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, la suite (u_{kn}) converge.

Exercice n° 26 (*I)**

Soit f une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$.

Exercice n° 27 (*I)**

Soit u_n l'unique racine positive de l'équation $x^n + x - 1 = 0$. Etudier la suite (u_n).

Exercice n° 28 (***)

Etude des suites $(u_n) = (\cos na)$ et $(v_n) = (\sin na)$ où a est un réel donné.

1) Montrer que si $\frac{a}{2\pi}$ est rationnel, les suites u et v sont périodiques et montrer dans ce cas que (u_n) et (v_n) convergent si et seulement si $a \in 2\pi\mathbb{Z}$.

2) On suppose dans cette question que $\dfrac{a}{2\pi}$ est irrationnel .

a) Montrer que (u_n) converge si et seulement si (v_n) converge .

b) En utilisant différentes formules de trigonométrie fournissant des relations entre u_n et v_n, montrer par l'absurde que (u_n) et (v_n) divergent.

Exercice n° 29 (***)

Calculer $\inf_{\alpha\in]0,\pi[}(\sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|))$.

Exercice n° 30 (I)**

Soit (u_n) une suite réelle non majorée. Montrer qu'il existe une suite extraite de (u_n) tendant vers $+\infty$.

Exercice n° 31 (***)

Soit (u_n) une suite de réels éléments de $]0,1[$ telle que $\forall n\in\mathbb{N},\ (1-u_n)u_{n+1}>\dfrac{1}{4}$. Montrer que (u_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.

